A 54-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Sibiu, 23 aprilie 2003

Primul test de selecţie pentru OBM şi OIM – Seniori 2003

SOLUŢII

Subiectul 1

Cu notaţia $b_n = \frac{1}{a_n}$, avem $b_1 = 2$ şi relaţia de recurenţă se scrie

$$b_{n+1} = b_n^2 - b_n + 1, \quad n \geq 1.$$

De aici, $b_{n+1} - 1 = b_n(b_n - 1)$ şi prin înmulţirea relaţiilor de acest tip, obţinem

$$b_{n+1} = b_1 \cdots b_n + 1 \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{b_1 \cdots b_n b_{n+1}} = \frac{1}{b_1 \cdots b_n}.$$

In sfârşit prin adunarea de la $n = 1$ la $n = n$, rezultă

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n} = 1,$$

deci

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} < 1.$$

Subiectul 2

Se construiesc paralelogramele $ABDC$ şi $APEC$, deci $PEDB$ va fi, de asemenea paralelogram.
$\sigma(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{4} CD \cdot PE \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(DE \cdot PC + CE \cdot PD) = \frac{\sqrt{3}}{4}(6 + PD)$ (Teorema lui Ptolemeu).
$PA^2 + PD^2 - PB^2 - PC^2 = 2PO^2 + \frac{1}{2}AD^2 - 2PO^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = AB \cdot AC$
$PD^2 = 12 + AB \cdot AC = 12 + CD \cdot PE \leq 12 + PC \cdot ED + PD \cdot CE$
$PD^2 \leq 12 + 6 + PD \Rightarrow PD^2 - PD - 18 \leq 0 \Rightarrow PD \leq \frac{1+\sqrt{73}}{2}$
$\sigma(ABC) \leq \frac{\sqrt{3}}{8}(13 + \sqrt{73}) = \sigma_{\max}$
$\sigma_{ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{8}(13 + \sqrt{73})$ atunci când $PCED$ este inscriptibil, adică $\angle PCA \equiv \angle PBA$.

Subiectul 3

Fie $f : A \to B = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \cdots \times \mathbf{Z}_{k+1}$,

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = (\hat{\gamma_1}, \hat{\gamma_2}, \ldots, \hat{\gamma_k}).$$

$\operatorname{card} A = (k+1)! + 1$ şi $\operatorname{card} B = (k+1)!$ implică concluzia.